



## APLICACIÓN DE LA COMPUTACIÓN

### Wolfram Mathematica, aplicado a la transferencia de calor, método, solución exacta, para procesos de extrusión

### Wolfram Mathematica, applied to the heat transfer method exact solution for extrusion processes

Antonio - Jiménez Ramos<sup>1</sup>  
Juan Francisco - Puertas Fernández<sup>2</sup>  
Margarita J. - Lapido Rodríguez<sup>3</sup>

Julio Rafael - Gómez Sarduy<sup>3</sup>  
Yulier - Jiménez Santana<sup>4</sup>  
Fidel - Sosa Núñez<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Empresa de Producciones Plásticas Vasil Levski.

<sup>2</sup> Departamento Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad de Cienfuegos, Cuba.

<sup>3</sup> Centro de Estudio de Energía y Medio Ambiente (CEEMA), Facultad de Ingeniería, Universidad de Cienfuegos.

<sup>4</sup> Universidad de Guanajuato, Méjico.

#### RESUMEN/ABSTRACT

Los programas computacionales, para la solución a problemas de la cotidianidad, son muy comunes, por la rapidez en que pueden obtenerse resultados, que por los métodos tradicionales, serían muy trabajosos y sobre todo, aquellos en que las soluciones llevan repetidos cálculos. El trabajo pretende demostrar, como a través de la programación, aplicando el método de la solución exacta, se logran resultados rápidos, precisos, sobre similitudes y diferencias entre distintas geometrías en la transferencia de calor, que demuestran el comportamiento, según parámetros, en igualdad de condiciones, (propiedades geométricas; diámetros, longitud, espesores, volúmenes) y físicas, (conductividad térmica, calor específico y densidad), apreciando cómo influyen, en resultados como, tiempos de enfriamiento, producción según las propiedades físicas y el diseño del equipo, índices de consumo, temperaturas en el centro y superficie y otras, según, el método de extrusión de tuberías plásticas, necesarios en procesos productivos que requieren de monitoreo constantes.

**Palabras clave:** Procesos de extrusión, geometrías simples, modelación, propiedades físicas, transferencia de calor, Software Wolfram Mathematica.

*Computer programs for the solution to problems of everyday life, are very common, how quickly results can be obtained, than by traditional methods would be very laborious, and the conclusions to be arrived, for those in solutions, lead repeated calculations, even more. The aim of this work is to demonstrate, and through programming with Wolfram Mathematica 8.0 for the method of the exact solution, quick results are achieved and more accurately than by the method of approximation, the first term or any other, making it possible, depending on the worked geometries, perform different types of comparisons or studies demonstrating their behavior, to various parameters taken into account, on equal terms, as they are, geometric properties, as diameter, length, thickness, volume and physical properties such as thermal conductivity, specific heat and density, appreciating how they influence on results as cooling times, production according to the physical properties and equipment design, consumption rates, temperatures in the center and surface and others, according to the method of extruding plastic pipes, very necessary in production processes requiring precise monitoring and constant.*

**Keywords:** Plastic extrusion, simple geometries, modeling, physical properties, heat transfer, Software Wolfram Mathematica.

## INTRODUCCIÓN

El Wolfram Mathematica, por sus características, es utilizado en áreas científicas de ingeniería, en sus variadas especialidades, matemáticas y computacionales. Comúnmente considerado como un sistema de álgebra computacional, Mathematica es también, una poderosa herramienta para las programaciones, de propósito general. De ahí, que puede ser utilizado, para múltiples soluciones, a problemas ingenieriles [1-3], siendo un lenguaje, que se actualiza constantemente, siempre con mayores posibilidades de aplicación.

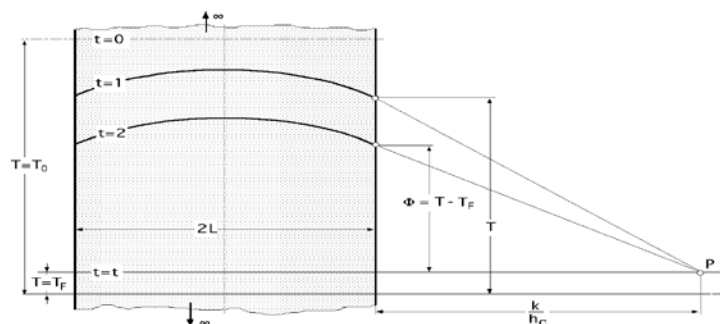
Generalmente la solución a problemas de transferencia de calor en tuberías y placas en la tecnología por extrusión se realizan por el método de la aproximación del primer término, teniendo en cuenta la facilidad de cálculo sobre todo para problemas donde no se requiere de una elevada exactitud, pudiéndose alcanzar con él hasta un 96-98%, aproximadamente haciéndose muy complejo alcanzar precisiones superiores sin que se utilice el de la solución exacta.

El método de la solución exacta requiere de análisis numéricos para su solución por la complejidad de sus ecuaciones y de ahí la utilización de distintos software. Para este caso la solución con Wolfram Mathematica 8.0, parte siempre de la conformación de las ecuaciones que representan a cada una de estas geometrías, para el caso de las placas, coordenadas cartesianas y para las tuberías coordenadas cilíndricas, las cuales deben ser meticulosamente desarrolladas, para obtener los resultados deseados, pues la solución para cada una de ellas, tienen semejanzas [4-6].

El trabajo pretende demostrar, la viabilidad del uso de este software, para lograr resultados rápidos y con las presiones que se requieren, para cada una de las particularidades que se presenten, pudiendo ser una forma de comparación de parámetros, como el comportamiento energético de geometrías diferentes. En este caso, las placas y tuberías, en volúmenes, teniendo en cuenta parámetros y materias primas similares, en cuanto a producción, índices de consumo, tiempos de enfriamiento, temperaturas exteriores e interiores y otras [7-9].

## MATERIALES Y MÉTODOS

En la transferencia de calor, existen muchas formas para la solución de problemas, utilizados en ingeniería, en este primer caso, la solución para la programación en, Wolfram Mathematica 8.0, corresponde a una placa, rodeada por un fluido convector, a la temperatura final  $T_f$ , que se introduce instantáneamente en el fluido en las condiciones en que la resistencia a la transferencia de calor es muy pequeña, figura 1. Por el concepto de placa y que el fluido es el mismo y se encuentra por ambos lados, existe simetría y resulta que el coeficiente convectivo  $h_c$ , será el mismo entre ambas semiplacas, de forma que, considerando esta placa infinita de espesor ( $esp. = 2L$ ) para la que en el tiempo ( $t = 0$ ), existe una distribución de temperatura conocida y en la que no existen efectos de bordes, se aplica la ecuación diferencial [1-10-11], ecuación (1).



**Fig. 1. Interpretación de la condición de contorno de convección, en una placa infinita.**

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \text{ con: } T = (x, t) \quad (1)$$

Antonio Jiménez Ramos *et al.*

Haciendo cambio de variable  $\Phi = T - T_f$  con  $T_f \neq 0$ ; ecuación (2):

$$\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (2)$$

Cuya solución general es; ecuación (3):

$$\Phi = \lambda e^{-\lambda^2 \alpha t} [B_1 \text{Sen}(\lambda x) - B_2 \text{Cos}(\lambda x)] \quad (3)$$

Y las condiciones de contorno.

Para  $T = 0$ ,  $-L \leq X \leq L$ ;  $\Phi = f(x)$  ó  $T_0$  2- Para  $T > 0$  se cumplirá que; ecuación (4):

$$x = 0: \quad \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \quad x = \pm L; \quad -k \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=\pm L} = h_c \Phi; \quad \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=\pm L} = -\frac{h_c}{k} \Phi = a_1 \Phi \quad (4)$$

Como el fluido a ambos lados de la placa es el mismo entonces.

$$\Phi_{-x} = \Phi_{+x} \text{ entonces } \frac{h_c}{k} = Cte = -a_1 \text{ y la igualdad se cumple para cualquier valor de } \Phi.$$

Teniendo en cuenta la condición de contorno  $x = 0$ ; ecuación (5):

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 = \lambda e^{-\lambda^2 \alpha t} [B_1 \text{Cos}(\lambda x) - B_2 \text{Sen}(\lambda x)]_{x=0} \Rightarrow B_1 = 0 \quad (5)$$

La solución se reduce a, ecuación (6):

$$\phi = B e^{-\lambda^2 \alpha t} \text{Cos}(\lambda x) \quad (6)$$

La condición de contorno en  $(x = \pm L)$  permite obtener los valores de  $\lambda$ ; ecuación (7):

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x=\pm L} = -\frac{h_c}{k} \phi \Rightarrow B \lambda e^{-\lambda^2 \alpha t} [-\text{Sen}(\lambda x)]_{x=L} = -\frac{h_c}{k} [B e^{-\lambda^2 \alpha t} \text{Cos}(\lambda x)]_{x=L}$$

$$\text{Sen}(\lambda L) = \frac{h_c}{k \lambda} \text{Cos}(\lambda L); \quad \text{Cotg}(\lambda L) = \frac{\lambda L}{Bi} \quad (7)$$

Dicha ecuación se satisface para un número infinito de valores del parámetro  $(\lambda L)$ , por lo que para un valor de  $L$  dado, sus soluciones se encuentran para diversos valores de  $\lambda$ , con intersección en las curvas: ecuación (8),

$$y = \text{Cotg}(\lambda L); \quad y = \frac{\lambda L}{Bi} \quad (8),$$

nótese la dependencia de la ecuación con respecto a  $Bi$ .

Por lo que la distribución de temperatura, es una serie de la forma; ecuación (9):

$$\frac{\phi}{\phi_0} = \frac{T_c - T_f}{T_0 - T_f} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \frac{\text{Sen}(\lambda_n L) \text{Cos}(\lambda_n x)}{\lambda_n L + \text{Sen}(\lambda_n L) \text{Cos}(\lambda_n L)} \quad (9)$$

En la que  $\lambda_n$ , es la raíz  $n$ -ésima de la ecuación; ecuación (10):

$$\text{Cotg}(\lambda_n L) = \frac{\lambda_n L}{Bi} \quad (10)$$

La condición inicial  $\phi = f(x) = \phi_0 = Cte$ , para  $(t=0)$  es; ecuación (11):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{Cos}(\lambda_n L) \quad (11)$$

A partir de la cual se obtiene  $B_n$ , teniendo en cuenta, la teoría de las funciones ortogonales.

La expresión de la distribución de temperatura, en la placa infinita, función de la posición y el tiempo es; ecuación (12):

$$\phi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \frac{\text{Cos}(\lambda_n x)}{\lambda_n L + \text{Sen}(\lambda_n L) \text{Cos}(\lambda_n L)} \int_0^L f(x) \text{Cos}(\lambda_n x) dx \quad (12)$$

Para el caso particular, en que la primera condición de contorno fuese de la forma.

$\phi = f(x) = \phi_0 = Cte$  la ecuación anterior se transforma en; ecuación (13):

$$\frac{\phi}{\phi_0} = \frac{T_s - T_f}{T_0 - T_f} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \frac{\text{Sen}(\lambda_n L) \text{Cos}(\lambda_n x)}{\lambda_n L + \text{Sen}(\lambda_n L) \text{Cos}(\lambda_n L)} \quad (13)$$

La temperatura  $\Phi_c = T_c - T_f$  en el eje de la placa ( $x = 0$ ) de espesor ( $2L$ ) es; ecuación (14):

$$\frac{\phi_c}{\phi_0} = \frac{T_c - T_f}{T_0 - T_f} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n^2 \alpha t} \frac{\text{Sen}(\lambda_n L)}{\lambda_n L + \text{Sen}(\lambda_n L) \text{Cos}(\lambda_n L)} \quad (14)$$

Para el segundo caso, la programación en Wolfram Mathematica 8.0, para la tubería, el procedimiento es similar al anterior, pero la longitud característica de la placa ( $L$ ), que varía de la superficie al centro, es sustituida por la ( $r$ ), que es el radio, que varía desde la superficie de la tubería, hasta su radio interior, otra diferencia, en este caso, es que se resuelve con la ecuación en coordenadas cilíndricas y son utilizadas, las ecuaciones de Bessel y Newman, debido a la distribución de temperatura, que existe en este tipo de geometría, además, en la placa, existe dependencia del número de Biot y en la tubería no; ecuación (15):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \text{ con: } \phi = T - T_f \quad (15)$$

donde  $\Phi$ , es la temperatura adimensional, que es una función del radio y el tiempo,  $T$  es la temperatura en grados Celsius,  $T_f$  es la temperatura final. Aplicando el método de separación de variables, las ecuaciones diferenciales ordinarias resultantes y sus soluciones son; ecuación (16):

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} = -\lambda^2 R, \text{ solución general: } R = B_1 J_0(\lambda r) + B_2 Y_0(\lambda r) \quad (16)$$

donde  $R$  es una función, que depende solamente del radio,  $J_0$  es la función de *Bessel* de primera especie, de orden cero,  $Y_0$  es la función de *Bessel* de segunda especie, de orden cero o (función de *Newman*),  $B_1$  y  $B_2$  son constantes; ecuación (17):

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\lambda^2 \alpha \cdot dt, \text{ solución general: } \theta = B_3 e^{-\lambda^2 \alpha t} \quad (17)$$

Antonio Jiménez Ramos *et al.*

donde  $\theta$ , es una función que depende solamente del tiempo y  $B$  es una constante.

Si se tratara de un cilindro macizo, entonces, como este no puede admitir en su eje ( $r = 0$ ), una solución infinita, por cuanto  $Y_0 = -\infty$  resulta que  $B_2$  tiene que ser (0) y se obtiene una ecuación de la forma; ecuación (18):

$$R = B_1 J_0(\lambda r) \quad (18)$$

La solución general que proporciona la distribución de temperatura es; ecuación (19):

$$\phi = B_3 e^{-\lambda^2 \alpha t} B_1 J_0(\lambda r) = B e^{-\lambda^2 \alpha t} J_0(\lambda r) \quad (19)$$

En la que  $B$  y  $\lambda$  son constantes que se determinan por las condiciones de contorno.

La condición inicial es:

$$t = 0; \quad 0 \leq r \leq R; \quad \phi = f(r) \text{ o } \phi_0$$

La condición para un cambio brusco de temperatura en la superficie lateral del cilindro infinito es; ecuación (20):

$$\phi = T - T_f \text{ es: } t > 0; \phi_{r=R} = 0 = B e^{-\lambda^2 \alpha t} J_0(\lambda r); J_0(\lambda R) = 0 \Rightarrow J_0(\lambda_n R) = 0 \quad (20)$$

Por lo que ecuación (21):

$$\phi = B e^{-\lambda^2 \alpha t} J_0(\lambda r) \quad (21)$$

Que se tiene que cumplir para cualquier valor de  $t$  con las condiciones:

$$1) \text{ Para, } t = 0; \quad 0 \leq r \leq R; \quad \phi = f(r) \text{ o } \phi = T_0$$

$$2) \text{ Para, } t > 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial r_{r=R}} = \frac{-h_c}{k} T$$

Teniendo en cuenta la segunda condición de contorno y que  $\frac{\partial}{\partial r} J_0(\lambda r) = -\lambda J_1(\lambda r)$ ,

Resulta; ecuación (22):

$$B e^{-\lambda^2 \alpha t} [-\lambda J_1(\lambda r)]_{r=R} = -\frac{h_c}{k} \left[ B e^{-\lambda^2 \alpha t} J_0(\lambda r) \right]_{r=R} \Rightarrow \lambda R = \frac{J_0(\lambda R)}{J_1(\lambda R)} Bi; \quad \frac{J_0(\lambda R)}{J_1(\lambda R)} = \frac{\lambda R}{Bi} = y \quad (22)$$

Que se satisface para infinitos valores de  $\lambda$  con la intersección de las curvas.

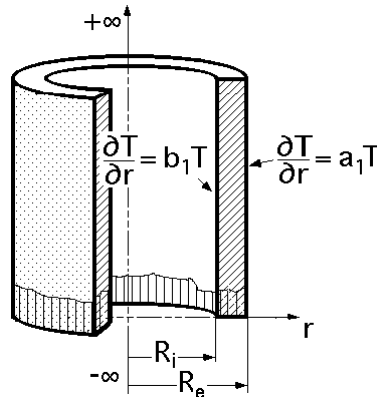
Siendo los valores de  $\lambda_n$  raíces de la ecuación; ecuación (23):

$$\frac{J_0(\lambda_n R)}{J_1(\lambda_n R)} = \frac{\lambda_n R}{Bi} \quad (23)$$

Para el caso de una tubería, con condiciones iniciales:  $t = 0; r_i \leq r \leq r_e; \phi = f(r)$  ó  $\phi_o$ , la segunda constante no se hace cero, como en el cilindro, [1], esta se busca también, con las condiciones de contorno según figura 2. Su obtención es más compleja, pues la constante  $B_2$ , no puede ser cero, debido a que el centro ( $r = 0$ ), no entra en el dominio y para poder obtener una solución del problema, se escribe una constante en función de la otra, a partir de las condiciones de contorno y de esta forma, aplicando la teoría de funciones ortogonales, se obtiene una expresión para esta constante. Condiciones de contorno para  $t > 0$ ; ecuación (24):

Antonio Jiménez Ramos *et al.*

$$r = re : \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=re} = a_1 \cdot \phi = -\frac{h_c}{k} \phi \quad r = ri : \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=ri} = 0 \quad (24)$$



**Fig. 2. Interpretación de la condición de contorno de convección, en un elemento de volumen de una tubería infinita.**

De las condiciones de contorno, se obtiene la ecuación trascendente, cuyas raíces son los  $\lambda_n$  de la ecuación solución; ecuación (25):

$$\lambda_n [J_1(\lambda_n re) Y_1(\lambda_n ri) - J_1(\lambda_n ri) Y_1(\lambda_n re)] - a_1 [J_0(\lambda_n re) Y_1(\lambda_n ri) - J_1(\lambda_n ri) Y_0(\lambda_n re)] = 0 \quad (25)$$

donde  $J_1$  es la función de *Bessel* de primera especie, de primer orden y  $Y_1$  es la función de *Bessel* de segunda especie de primer orden.

Resultando que la solución general del problema, es una combinación lineal de infinitas soluciones, para los infinitos auto valores de  $\lambda$ ; ecuación (26):

$$\phi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda^2 a t} \frac{\int_{ri}^{re} r \phi_0 [J_0(\lambda_n r) Y_1(\lambda_n ri) - J_1(\lambda_n ri) Y_0(\lambda_n r)] dr}{\int_{ri}^{re} r [J_0(\lambda_n r) Y_1(\lambda_n ri) - J_1(\lambda_n ri) Y_0(\lambda_n r)]^2 dr} \cdot [J_0(\lambda_n r) Y_1(\lambda_n ri) - J_1(\lambda_n ri) Y_0(\lambda_n r)] \quad (26)$$

La temperatura  $a$  dimensional queda en función del tiempo y el radio, ( $r_i$  y  $r_e$ ).

$$temp_i = \phi(ri, t)$$

donde:  $temp_i$ . Es la temperatura  $a$  dimensional en el radio interior de la tubería.

$$temp_e = \phi(re, t) : \text{Temperatura } a \text{ dimensional en el radio exterior de la tubería}$$

Se calcula finalmente, la temperatura para cualquier tiempo y espesor [14]. Para la temperatura en la superficie o radio exterior ( $T_s$ ); ecuación (27):

$$\phi(re, t) = \frac{T_s - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad (27)$$

y para la temperatura intermedia o radio interior ( $T_0$ ); ecuación (28):

$$\phi(ri, t) = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad (28)$$

Antonio Jiménez Ramos *et al.*

Suposiciones, la convección es forzada pues el agua se mueve impulsada por bombas.

Para darle solución a todos estos casos, es necesario conocer o hacer algunos cálculos como.

Ancho: 11 = Altura: 12 Longitud: Por lo tanto área de la bañera será:  $A_b = 11 \times 12$

Flujo de agua:  $Q$ ,

Cálculo de la velocidad del agua: Área de flujo de agua,  $A_a = \text{Área de bañera} - \text{Área de (tubería, cilindro, o placa)}$ .

Área de tubería =  $\pi \cdot (D/2)^2$  Si se conoce el flujo de agua entonces,  $Q = A_a V$  y  $v = Q / A_a$

Se calcula el coeficiente de transferencia de calor ( $h$ ), mediante el cálculo del número de Reynolds, para saber si el régimen es laminar o turbulento y Utilizar las correlaciones de Nusselt correspondiente; ecuación (29):

$$\text{Reynolds: } Re_D = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (29)$$

donde:  $\rho$  = Densidad de agua: (kg/m<sup>3</sup>),  $V$  = Velocidad de agua: (m/s)  $D$  = Diámetro o espesor: (m)

$\mu$  = Viscosidad dinámica del agua: (N.s/m<sup>2</sup>). Con  $Re_D$  y el número de Prandtl ( $Pr$ ) se calcula el

Número de Nusselt ( $N_{us}$ ). El  $Pr$  se calcula por, ecuación (30):

$$Pr = \frac{v}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{k} \quad (30)$$

donde:

$v$  = velocidad de difusión de momento y  $\alpha$  = velocidad de difusión del calor

$\mu$  = Viscosidad dinámica del agua  $C_p$  = Calor específico del agua,  $k$  = Conductividad térmica del agua W / m. K

Este valor es fácilmente encontrado en tablas.

Cálculo del número de Nusselt; ecuación (31):

$$\overline{Nu} = C Re_D^m Pr^{1/3} \quad (31)$$

Régimen aplicable para:  $0,4 < Re < 4 \times 10^5$ ;  $Pr \geq 0,7$ ; donde:  $C$  y  $m$  son constantes que se toman por tabla según el valor de Reynolds. Otras correlaciones; ecuación (32) y (33):

$$N_{us} = 0,3 + \frac{0,62 \cdot Re_D^{0,5} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}}{(1 + (\frac{0,4}{Pr})^{\frac{2}{3}})^{0,25}} \cdot ((1 + \frac{Re_D}{282000})^{\frac{5}{8}})^{0,8}; \quad (\text{régimen } Re_D \cdot Pr > 0,02) \quad (32)$$

$$N_{us} = Pr^{0,3} \cdot (0,35 + 0,47 \cdot Re^{0,52}) \quad (33)$$

Régimen aplicable para:  $Re > 200$  y  $Pr > 0,7$

Coficiente convectivo; ecuación (34):

$$h = N_{us} \frac{k}{D} \quad (34)$$

Antonio Jiménez Ramos *et al.*

Las propiedades físicas del material utilizado fueron:

$k = 0,22 \text{ W/m. } ^\circ\text{K}$  Conductividad térmica.  $\rho = 1400 \text{ kg/m}^3$  Densidad.

$C_p = 1273 \text{ J/kg}^\circ\text{K}$  Calor específico.

Además, deben conocerse o calcularse, las propiedades del sólido, que se enfría o calienta, como densidad, calor específico y Conductividad térmica y con estos elementos se procede a la programación. El flujo de la máquina utilizada, fue de 270 kg/h, con 143 kW de potencia general, se consideró un 85 %, de esa potencia, igual a 122 kW.

El programa se inicia, con la introducción de los datos: Diámetro de la tubería o ancho fr la placa (mm), Espesor para ambas (mm), temperatura inicial del material ( $^\circ\text{C}$ ), temperatura del agua de enfriamiento ( $^\circ\text{C}$ ), temperatura deseada ( $^\circ\text{C}$ ) para la superficie, radio interior o centro, flujo de la máquina (kg/h), dimensiones del intercambiador de calor, propiedades del material y del agua, 0 tipo de superficie de intercambio. Con estos datos, realiza el cálculo del tiempo de enfriamiento, basado en el flujo según diseño de la máquina. Posteriormente, calcula  $T_i$  y  $T_e$  según la temperatura deseada en río  $r_e$ , o centro y con estos datos el tiempo que demora el enfriamiento para llegar a la temperatura deseada según sea el caso que tiene en cuenta las propiedades termofísicas del material, mediante la herramienta de trabajo (software Wolfram Mathematica 8.0), se compara con la temperatura deseada de ser mayor o menor le suma, o le resta el valor deseado, hasta llegar a la diferencia necesaria, según la precisión requerida.

Del resultado de este proceso, surge un tiempo de enfriamiento, que tiene que ver con las propiedades termo físicas, de la materia prima introducida, con el cual se realiza, un nuevo cálculo del flujo máximo para la máquina, que no tiene que ver directamente, con el de diseño y a partir de estos resultados, se obtienen los demás, la mayor eficiencia del equipo, es aquella que el resultado, según las propiedades termo físicas, estén lo más cercano posible al diseño productivo de la máquina, calculando a partir de este resultado, los índices productivos y de consumos óptimos, al final hace un reporte de todos los indicadores que se le solicitan, dando la posibilidad además de conocer los valores de cada una de las ecuaciones y variables que participan en el proceso. Una muestra de esto se visualiza en la tabla 1, que es solamente una muestra de un reporte solicitado. Las gráficas con las cuales se calculan los intervalos y los coeficientes para la placa y la tubería son diferentes, pues la placa es dependiente del número de Biot y la tubería no, por ser diferentes geometrías, apreciado en la gráficas 1 y 2, para un espesor de 4.3 mm. La figura 3, muestra el procedimiento de cálculo descrito.

**Tabla.1** Comparación entre tubería diámetro 90 mm y placa con sus dimensiones y propiedades equivalentes

Espesor(mm)	5,4	4,3	3,5	2,7	2,2
Tiempo en alcanzar la temperatura deseada en $r_e$ (seg.) Tubería	235	184	147	111	89
Tiempo en alcanzar la temperatura deseada en $r_e$ (seg.) Placa	215	163	128	96	75
Temperatura en $r_i$ . ( $^\circ\text{C}$ )	62	55	50	47	44
Temperatura en $r_e$ . ( $^\circ\text{C}$ )	30	30	30	30	30
Producción metros de tubería 8 h según ( $\rho$ )	1 075	1 333	1 622	2 083	2 542
Producción metros de tubería 8 h según (PF)	978	1 247	1 562	2 078	2 602
Producción metros de placa 8 h según ( $\rho$ )	1 011	1 269	1 559	2 021	2 480
Producción metros de placa 8 h según (PF)	1 072	1 413	1 800	2 451	3 072
Volumen tubería $1 \text{ m}^3$ .	0,00116	0,001158	0,00095	0,00074	0,00061
Volumen placa $1 \text{ m}^3$ .	0,00152	0,001215	0,00099	0,00076	0,00062
Diferencia de volumen placa- tubería $1 \text{ m}^3$ .	0,00037	0,000057	0,00004	0,00002	0,00001

( $\rho$ ) densidad materia prima como predominio, (PF) Propiedades termofísicas en función del proceso de enfriamiento.



Antonio Jiménez Ramos *et al.*

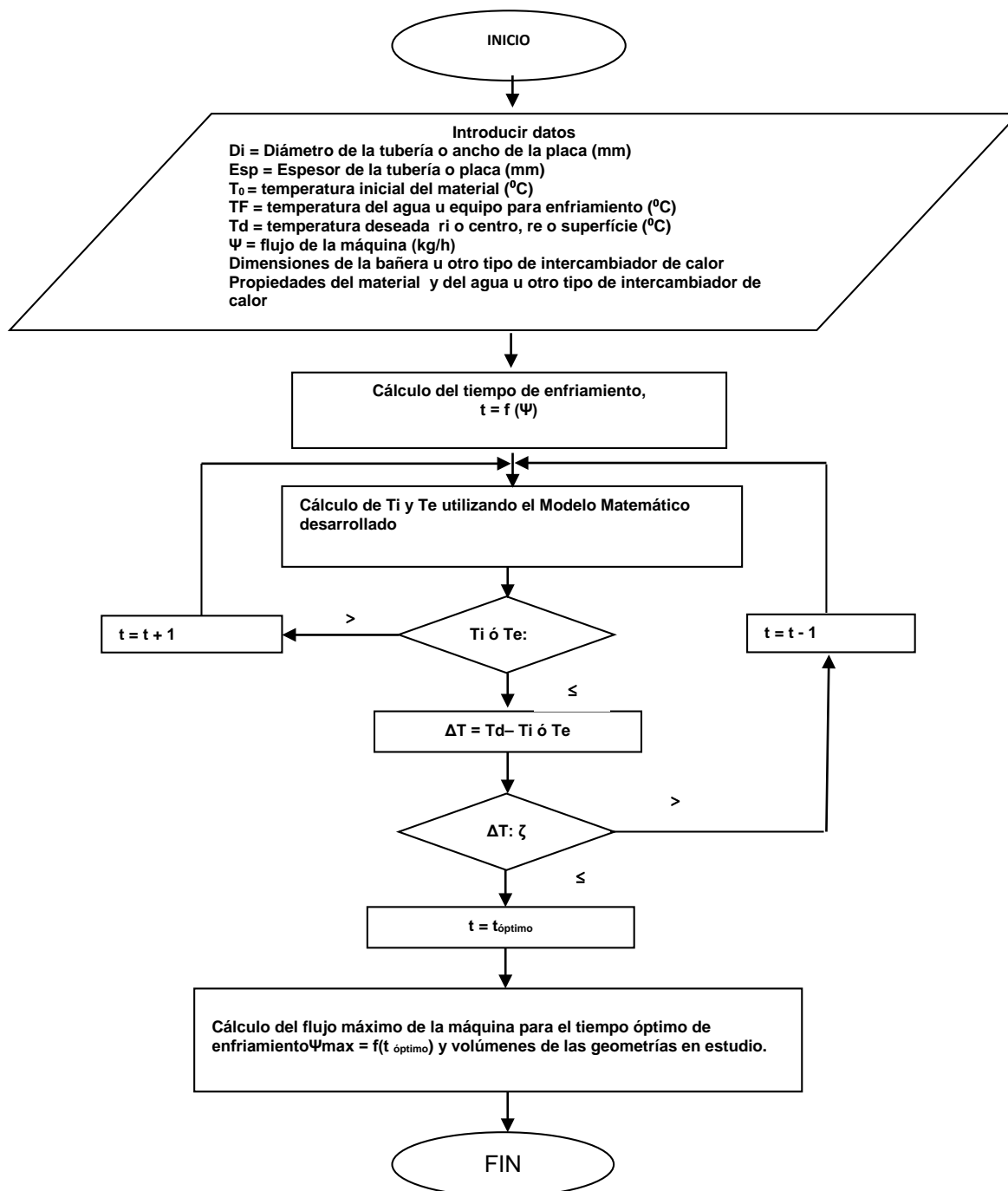
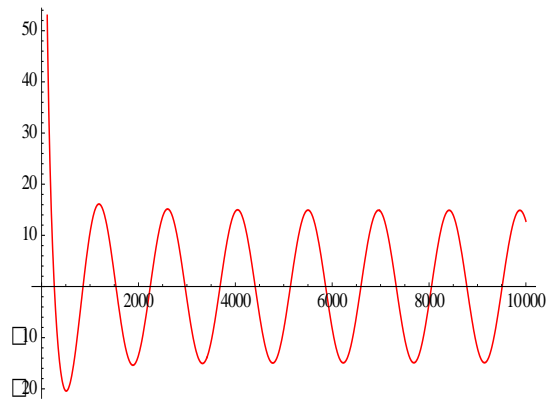
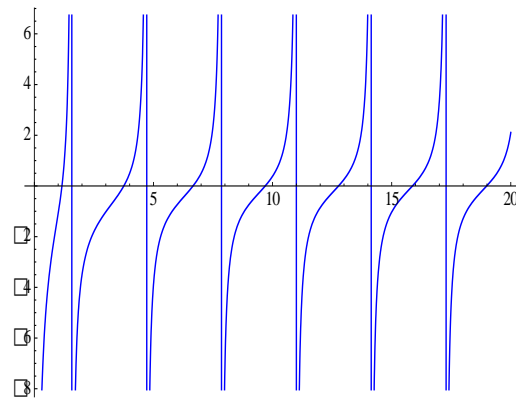


Fig. 3. Diagrama de flujo del procedimiento descrito.



**Graf. 1. infinitas soluciones para los infinitos auto valores  $\lambda_n$ , para tubería**



**Graf. 2. infinitas soluciones para los infinitos auto valores  $\lambda_n$ , para placa**

## RESULTADOS Y DISCUSIONES

Con la aplicación del Wolfram Mathematica 8.0 como herramienta de trabajo para la solución a problemas de transferencia de calor por el método de la solución exacta, se pueden obtener entre otros, los siguientes resultados.

Desarrollar los cálculos con gran rapidez en tiempo real, de cada uno de los parámetros necesarios, para la obtención del índice de consumo y productivo, para cada producto.

La posibilidad de tomar parámetros, como una misma diferencia de temperatura, a la salida del extrusor y de entrada a la bañera, iguales espesores, distancias de enfriamiento, temperatura en el radio interior y exterior, así como las propiedades termo físicas del material, y demostrar como varían los tiempos de enfriamiento, las producciones, los índices de consumo y los volúmenes de las geometrías en estudio.

La tabla 1, muestra, un reporte de parámetros obtenidos con la aplicación de la herramienta, a los que se le pueden agregar otros. El nivel de precisión en tiempo real, que se quiera obtener como es de ( $n=1$  hasta  $\infty$ ), será fijada según la necesidad del proceso que se ejecute, (productivo o investigativo), facilidad que existe por utilizarse una programación de este tipo.

Otro ejemplo de las bondades de esta aplicación, se aprecia, al comparar basada en su exactitud, como los volúmenes y el tiempo de enfriamiento, disminuyen, en la medida, en que disminuyen los espesores, tendiendo a cero, demostrando esta condición, que verdaderamente, mientras más fino el espesor, más se acercan los valores entre ambas geometrías, no obstante, se demuestra la no conveniencia, de usar, para la solución a problemas de tuberías de espesores finos, el darle el tratamiento como si fuera una placa, pues el resto de los indicadores a medir no presentan la misma situación.

Con la herramienta pudo definirse los dos parámetros principales a tener en cuenta, para lograr una eficiencia productiva y energética de este proceso. La densidad, con correspondencia directa, con el flujo del equipo y la alcanzada con las propiedades termo físicas del material, en función del proceso de enfriamiento, que aporta un parámetro más a tener en cuenta, para cualquier análisis energético y productivo.

## CONCLUSIONES

1- Con la utilización de esta herramienta de trabajo, (Wolfram Mathematica 8.0) se demostró que para desarrollar cualquier análisis, del proceso productivo y definir un mejoramiento energético, en las máquinas extrusoras de tuberías plásticas, es necesario, tener en cuenta, dos elementos esenciales. Para el flujo productivo, como base principal, la densidad de la materia prima y desde el punto de vista energético, la conjugación, de las propiedades termo físicas presentes en la misma, pues ambas actúan diferentes en el proceso.

2- Se trabaja el programa como base con la temperatura deseada en  $r_i$  y  $r_e$  para la tubería que nos aporta el tiempo mínimo en alcanzarla para ambos y con este, se busca la temperatura deseada en la placa, para calcular la producción y los índices de consumo, en ambas geometrías.

3- Se demostró además que los volúmenes de la placa y la tubería se reducen y tienden a cero en la medida que disminuyen sus espesores, pero referido a la producción aumenta en la tubería con respecto al flujo de la maquina, y según las características de la materia prima, la producción es menor que la de la placa, con estas características se comportan igualmente los índices de consumo.

## REFERENCIAS

- [1] González De Brito, F. *Condición de Contorno de convección en salidos infinitos*. 8va. ed. Cap. IV, p. 79-90. Ed. Concepción Hernández, Madrid, 30 de mayo de 2011, [Consulta: 15 de noviembre de 2015], Disponible en web: <http://es.scribd.com/doc/56672254/IV-Condicion-de-Contorno-de-Conveccion-en-Solidos-Infinitos#scribd>. ISBN 007-844785-2.
- [2] MACKOWSKI, D. W. *Conduction Heat Transfer Notes for MECH 7210*, Mechanical Engineering Department Auburn University 2. Preface 8 Hybrid Analytical/Numerical Methods in Conduction, 215. Cap. 3 p. 80- 82. [Consulta 12 de octubre de 2015]. Disponible en: <http://www.eng.auburn.edu/~dmckwski/mech7210/condbook.pdf>.
- [3] ABASCAL, R. *Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior, Funciones de Bessel*, Facultad Regional Avellaneda, Buenos Aires, Argentina. 2006. (Ed. Universitaria de la U.T.N.) p. 2-5 [Consulta 23 de diciembre de 2015]. Disponible en web: <http://www.edutecne.utn.edu>. ISBN 978-950-42-0078-9.
- [4] Ramírez Carrera, Y. R. "Tecnología para la producción de tubos de polietileno de alta densidad para la conducción de agua en la empresa Holplast de Holguín". *Ciencia & Futuro*. 2014, vol. 4, n. 2, Ingeniería Metalúrgica, Instituto Superior Minero Metalúrgico. [Consulta: 12 de febrero de 2016]. ISSN 2306-823X.
- [5] Suéscum, J.; Correa, C.; Rigail-Cedeño, A. "Mejora de la eficiencia de una extrusora de doble tornillo utilizada en la fabricación de tuberías de PVC". *Revista Tecnológica ESPOL*, vol. 20, n. 1, 25-30 (Octubre 2007), p. 3-5, [consulta 12 de enero de 2016] disponible en <http://www.rte.espol.edu.ec/index.php/tecnologica/article/view/158>. ISSN 0257-1749
- [6] Osswald, Tim A; Aquite, William Ramírez, Daniel, López, Luisa, Puentes, John, Pérez Camilo, García Rodríguez, Sylvana, "Retos en la Industria del procesamiento de plásticos y compuestos". *Dyna*, vol. 79, n. 175, p. 20-28, octubre 2012. Universidad Nacional de Colombia, [consulta 10 de diciembre de 2015] disponible en <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=49624956005>. ISSN 0012-7353.
- [7] C. Andrés Vargas Isasa, Juan C. Posada Correa, Leyla Y. Jaramillo Zapata, Luis Alberto García "Consumo de energía en la Industria del plástico: Revisión de estudios realizados". *Revista CEA/ 7005-1520*, 2 PB. Pdf. vol. 1 n. 1, p.93-107 , pág. 3-7, junio de 2015 [consulta 17 de febrero de 2016] Disponible en <http://www.itm.edu.co/cienciaseconomicas/Documentos/RevistaCEA/705-1520-2-PB.pdf>. ISSN 2390-0725.
- [8] Antonio Jiménez Ramos y colectivo de autores "Mejoramiento de la eficiencia energética en los procesos de extrusión de tuberías plásticas". *Ingeniería Energética*, vol. XXXVI, n. 2, p. 220-229, año 2015, ISSN 1815 – 5901.
- [9] Holman, J. P. *Transferencia de calor*", 8va. ed. 1ra, en español, febrero 2013. Traducido por MacGraw-Hill Companies, inc. Cap. 4 p. 117-130, Cap. 5 p. 175-184, Ed. Concepción Fernández Madrid, [consulta 17 de noviembre de 2015] Disponible en <https://dredgarayalaherrera.files.wordpress.com>, ISBN 007-844785-2.
- [10] E. López, J. B. Hernández, G. Solorio, H.J. Bergara, O. Vázquez y P. Gamica. "Modelo Matemático de la transferencia de calor para predecir el perfil de dureza en probetas Jominy". *Revista Metalurgia* 49 (2) marzo-abril p.111-121, 2013 [consulta 12 de enero de 2016], disponible en <http://www.scielo.org.mx/pdf/rmiq/v12n3/v12n3a22.pdf> ISSN 0034-8570 el SSN 1988-4222 DOI10.3989/revmetalm 1233.
- [11] Krastek Robert Ramos, Saibel Duarte Ángel. "Formulación de un modelo matemático para optimizar el tiempo de producción en una planta extrusoras de tubos". Universidad, Ciencia y Tecnología, versión impresa uct. vol. 16 n. 62 Puerto Ordaz mar. 2012, [consulta 9 de febrero de 2016] disponible en [http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1316](http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316). ISSN 1316-4821

## **AUTORES**

### **Antonio Jiménez Ramos**

Ingeniero Termo energético, Máster en Eficiencia Energética, Director General Empresa de Producciones Plásticas Vasil Levski, Cienfuegos, Cuba.

E-mail: [antonio@petrocasa.minem.cu](mailto:antonio@petrocasa.minem.cu).

### **Juan Francisco Puertas Fernández**

Ingeniero Mecánico, Doctor en Ciencias Técnicas, Profesor Titular, Jefe del Departamento Mecánica Facultad de Ingeniería Universidad de Cienfuegos, Cuba.

E-mail: [Juan F puertas@ucf.edu.cu](mailto:Juan_F_puertas@ucf.edu.cu).

### **Margarita J. Lapido Rodríguez**

Ingeniera Mecánica, Doctora en Ciencias Técnicas, Profesora Titular, Centro de Estudio de Energía y Medio Ambiente (CEEMA), Facultad de Ingeniería Universidad de Cienfuegos, Cuba

E-mail: [mlapido@ucf.edu.cu](mailto:mlapido@ucf.edu.cu)

### **Julio Rafael Gómez Sarduy**

Ingeniero Electricista, Doctor en Ciencias Técnicas, Profesor Titular, Centro de Estudio de Energía y Medio Ambiente (CEEMA), Facultad de Ingeniería Universidad de Cienfuegos, Cuba

E-mail: [jgomez@ucf.edu.cu](mailto:jgomez@ucf.edu.cu).

### **Yulier Jiménez Santana**

Licenciado en Física, Profesor Asistente, Estudiante de maestría en física Universidad de Guanajuato, Méjico

E-mail: [yjimenezs2485@gmail.com](mailto:yjimenezs2485@gmail.com).

### **Fidel Sosa Núñez**

Licenciado en Matemática, Máster en física Universidad de Guanajuato, Méjico

E-mail: [fidelsosan@gmail.com](mailto:fidelsosan@gmail.com),