

Modelo de un rectificador controlado para estudios de propagación de armónicos

José A. González
Ignacio Pérez

Agosto del 2001

Resumen / Abstract

Se describe un modelo matemático para simular un convertidor trifásico puente completamente controlado que se alimenta de una fuente de voltajes distorsionados. El objetivo consiste en obtener expresiones analíticas que permitan encontrar las corrientes inyectadas por este dispositivo a la red eléctrica de alimentación. Analizando solamente dos circuitos, de los doce que pueden sucederse a medida que las válvulas conmutan durante un período completo de oscilación del voltaje, el trabajo se simplifica notablemente.

Palabras claves: propagación de armónicos

This work describes a mathematical model to simulate a fully controlled AC-DC three-phase converter supplied from a distorted voltage source. The goal is obtain analytic expressions that permit to find the injected currents of this device to the source electric network. Analyzing only two circuits, of the twelve that can appear every time the converter valves switches in an entire voltage oscillation period, the work is notably simplified.

Key words: harmonic propagation

INTRODUCCIÓN

El control de equipos eléctricos con dispositivos a semiconductores se ha extendido ampliamente en la industria moderna, lo cual ha provocado un incremento de la inyección de corrientes de armónico en los sistemas de suministro eléctrico industrial.

La presencia de corrientes de carga distorsionadas provoca caídas de voltaje no sinusoidales en la red de suministro, lo cual implica la aparición de múltiples efectos perjudiciales en el sistema y los equipos eléctricos conectados a este.

Con el fin de predecir las consecuencias que estas inyecciones provocan en las redes eléctricas se han desarrollado varios métodos de simulación,^{1,3} que en

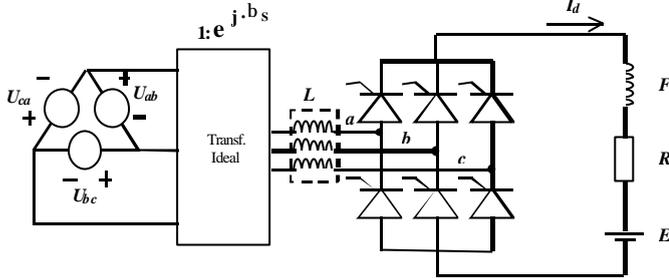
su implementación precisan de la obtención de los modelos de comportamiento de los diferentes elementos que componen una red eléctrica. La parte de mayor peso en este análisis radica en la obtención de los modelos de los dispositivos contaminantes.

CIRCUITO Y FORMAS DE ONDA

El circuito de un rectificador trifásico puente completamente controlado con carga R-L-E se muestra la figura 1.

El bloque correspondiente al transformador ideal se utiliza para representar las conexiones del transformador trifásico y debe incluir el efecto de rotación y transformación de los voltajes y corrientes. El efecto de la caída serie del voltaje se tiene en

cuenta en el parámetro L de las tres ramas de alimentación que siguen al bloque ideal.



Convertidor trifásico puente.

1

Los voltajes de alimentación se consideran balanceados y pueden tener cierto contenido de armónicos, representándose para cada fase como:

$$\begin{aligned}
 U_a &= f'(t) = \sum_k U^k \cdot \sin(k \cdot \omega_o \cdot t + q'_k) \\
 U_b &= f'(t - \frac{T_o}{3}) = \sum_k U^k \cdot \sin(k \cdot \omega_o \cdot t + q'_k - \frac{2 \cdot p \cdot d_k}{3}) \\
 U_c &= f'(t - \frac{2 \cdot T_o}{3}) = \sum_k U^k \cdot \sin(k \cdot \omega_o \cdot t + q'_k + \frac{2 \cdot p \cdot d_k}{3})
 \end{aligned}
 \quad \dots(1)$$

Los voltajes de línea serían entonces:

$$\begin{aligned}
 U_{ab} &= U_a(t) - U_b(t) = \sum_k U^k \cdot \sin(k \cdot \omega_o \cdot t + q_k) = f(t) \\
 U_{bc} &= \sum_k U^k \cdot \sin(k \cdot \omega_o \cdot t + q_k - \frac{2 \cdot p \cdot d_k}{3}) = f(t - \frac{T_o}{3}) \\
 U_{ca} &= \sum_k U^k \cdot \sin(k \cdot \omega_o \cdot t + q_k + \frac{2 \cdot p \cdot d_k}{3}) = f(t - \frac{2 \cdot T_o}{3})
 \end{aligned}
 \quad \dots(2)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 d_k &= \begin{cases} 1 & k = 1, 4, 7, \dots \\ -1 & k = 2, 5, 8, \dots \\ 0 & k = 3, 6, 9, \dots \end{cases} \\
 q_k &= q'_k + d_k \cdot \frac{p}{6}
 \end{aligned}
 \quad \dots(3)$$

Siendo θ'_k el ángulo del voltaje del armónico (k) correspondiente a la fase a .

La forma de onda de la corriente de línea en una fase sufre un total de 12 estados (o períodos) transientes en cada ciclo, los que están determinados por las transiciones de conexión y desconexión de cada par de válvulas del puente.

En la figura 2 se presentan las corrientes y los voltajes de línea.

Al ser simétrico el circuito y considerar que la alimentación es balanceada se cumplen las identidades resumidas en la tabla 1 en las formas de onda de las corrientes para los seis períodos indicados.

Es necesario aclarar que el término α es el ángulo de disparo de la válvula de la fase a , tal y como se muestra en la figura 2 y μ el tiempo que dura la conmutación entre dos válvulas.

Los restantes seis períodos presentan identidades similares debido a la simetría con respecto al eje del tiempo. De aquí que solo sea necesario determinar las corrientes en el período uno y dos para analizar los otros diez,¹ lo cual simplifica notablemente el trabajo matemático.

ANÁLISIS MATEMÁTICO

En el período uno (1) ocurre la conmutación entre las válvulas de las fases A y C, ya que i_c está disminuyendo e i_a comienza a crecer (figuras 2 y 3).

El circuito equivalente en este estado está dado por el representado en la figura 4.

El sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente al mismo es:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} L \cdot p & -L \cdot p \\ R + (2 \cdot L + F) \cdot p & R + (L + F) \cdot p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \end{bmatrix} &= \\
 &= \begin{bmatrix} U_{ab}(t) - U_{cb}(t) \\ U_{ab}(t) - E \end{bmatrix} \quad \dots(4)
 \end{aligned}$$

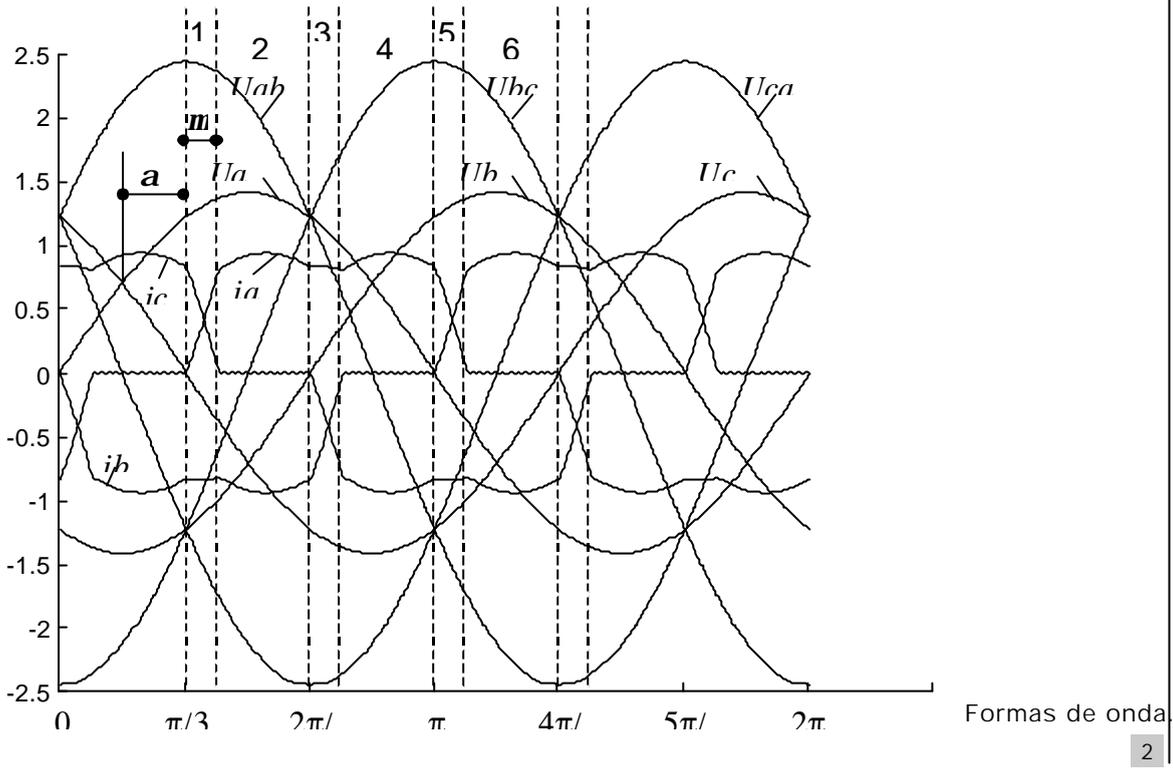
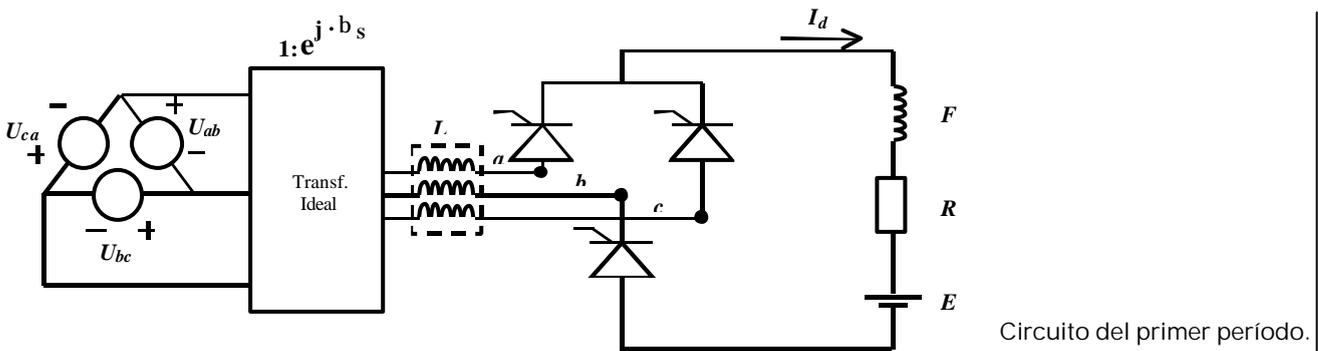
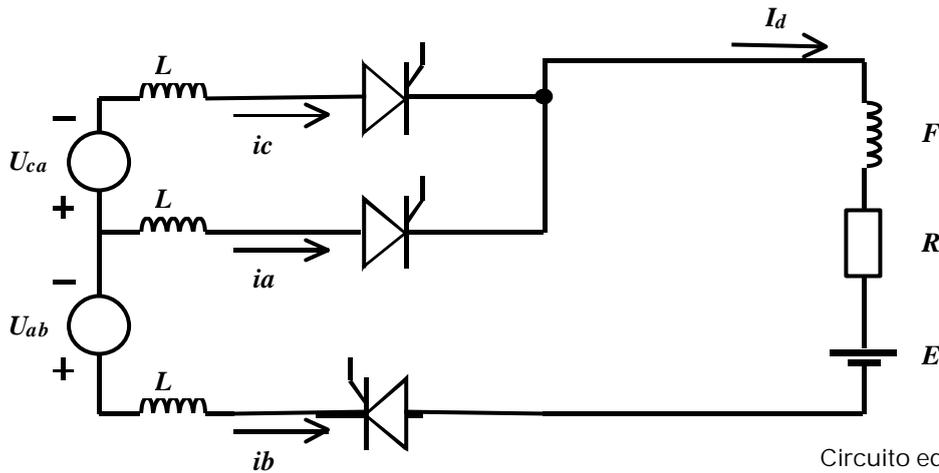


Tabla 1
Identidades de corriente

Período	Inicio	Final	$i_a(t)$	$i_b(t)$	$i_c(t)$
1	α	$\alpha + \mu$	$ia_1(t)$	$ib_1(t)$	$ic_1(t)$
2	$\alpha + \mu$	$\alpha + \pi/3$	$ia_2(t)$	$ia_2(t)$	$ic_2(t) = 0$
3	$\alpha + \pi/3$	$\alpha + \pi/3 + \mu$	$-ib_1(t - \pi/3)$	$-ic_1(t - \pi/3)$	$-ia_1(t - \pi/3)$
4	$\alpha + \pi/3 + \mu$	$\alpha + 2\pi/3$	$-ib_2(t - \pi/3)$	$-ic_2(t - \pi/3) = 0$	$-ia_2(t - \pi/3)$
5	$\alpha + 2\pi/3$	$\alpha + 2\pi/3 + \mu$	$ic_1(t - 2\pi/3)$	$ia_1(t - 2\pi/3)$	$ib_1(t - 2\pi/3)$
6	$\alpha + \pi/3 + \mu$	$\alpha + \mu$	$ic_2(t - 2\pi/3)$	$ia_2(t - 2\pi/3)$	$ib_2(t - 2\pi/3)$





Circuito equivalente del primer período.

4

La solución de este sistema es:

$$\begin{aligned} i_a^{(1)}(t) &= K_1^{(1)} + K_2^{(1)} \cdot e^{P_1 \cdot (t - \alpha)} + i_{as}^{(1)}(t) \\ i_c^{(1)}(t) &= -K_1^{(1)} + K_2^{(1)} \cdot e^{P_1 \cdot (t - \alpha)} + i_{cs}^{(1)}(t) \\ i_b^{(1)}(t) &= -(i_a^{(1)}(t) + i_c^{(1)}(t)) \end{aligned} \quad \dots(5)$$

donde:

$K_1^{(1)}$ y $K_2^{(1)}$ son constantes que dependen de las condiciones iniciales y el resto de los parámetros pueden calcularse directamente por expresiones analíticas. Por ejemplo, es la raíz no nula del determinante, dada por:

$$P_1 = -\frac{2 \cdot R}{3 \cdot L + 2 \cdot F} \quad \dots(6)$$

Las respuestas estables ($i_{as}^{(1)}(t)$ e $i_{cs}^{(1)}(t)$) de las corrientes se obtienen aplicando el principio de superposición en el circuito anterior:

$$\begin{aligned} i_{as}^{(1)}(t) &= \sum_k \left[\frac{U_{ab}^k(t)}{Z_{k1}} - \frac{U_{ca}^k(t) \cdot Z_{k2}}{Z_{k1} \cdot Z_{k3}} \right] - \frac{E}{2 \cdot R} \\ i_{cs}^{(1)}(t) &= \sum_k \left[\frac{U_{ab}^k(t)}{Z_{k1}} + \frac{U_{ca}^k(t) \cdot Z_{k4}}{Z_{k1} \cdot Z_{k3}} \right] - \frac{E}{2 \cdot R} \\ Z_{k1} &= 2 \cdot R + j \cdot (3 \cdot L + 2 \cdot F) \cdot w \cdot k \\ Z_{k2} &= R + j \cdot (L + F) \cdot w \cdot k \\ Z_{k3} &= j \cdot L \cdot w \cdot k \\ Z_{k4} &= R + j \cdot (2 \cdot L + F) \cdot w \cdot k \end{aligned} \quad \dots(7)$$

En el segundo período solo existe conducción entre las fases A y B ya que la válvula de la fase C está completamente desconectada pues la corriente a través de la misma cayó a cero al final del período anterior. Por tanto, el circuito equivalente es el mismo del período uno, pero eliminando la rama por donde circula la corriente de la fase C.

La ecuación diferencial del mismo es:

$$[R + (2 \cdot L + F) \cdot p] \cdot [i_a(t)] = [U_{ab}(t) - E] \quad \dots(8)$$

Cuya solución es:

$$\begin{aligned} i_a^{(2)}(t) &= K_2^{(2)} \cdot e^{P_2 \cdot (t - (a + m))} + i_{as}^{(2)}(t) \\ i_c^{(2)}(t) &= 0 \\ i_b^{(2)}(t) &= -(i_a^{(2)}(t) + i_c^{(2)}(t)) \\ P_2 &= -\frac{R}{2 \cdot L + F} \\ i_{as}^{(2)}(t) &= \sum_k \left[\frac{U_{ab}^k(t)}{Z_{k4}} \right] - \frac{E}{R} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \dots(9)$$

La constante $K_2^{(2)}$ y la duración de la conmutación, no tienen expresión analítica.

Para calcular las constantes ($K_1^{(1)}$, $K_2^{(1)}$, y $K_2^{(2)}$) involucradas en las ecuaciones obtenidas se emplea el sistema de ecuaciones (10) derivado de las condiciones de frontera entre los períodos, el cual tiene que ser resuelto numéricamente.

$$0 = ia^{(1)}(\alpha)$$

$$0 = ic^{(1)}(\alpha) - ic^{(0)}(\alpha) = ic^{(1)}(\alpha) - ia^{(2)}\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$0 = ia^{(1)}(\alpha + \mu) - ic^{(2)}(\alpha + \mu) \quad \dots(10)$$

$$0 = ic^{(2)}(\alpha + \mu)$$

En el caso de la segunda ecuación todo quedó planteado solamente en función de las constantes pertenecientes al primer y segundo periodos. Esto es posible ya que, como se había planteado, el sistema trifásico que se considera es balanceado y las corrientes son simétricas con respecto al eje del tiempo (figura 2 y tabla 1).

Este sistema de ecuaciones es trascendente y se resuelve numéricamente por el método de Newton-Raphson.

Por otra parte, si la conducción es incompleta el sistema de ecuaciones (10) se reduce a

$$0 = ia^{(2)}(\alpha) \quad \dots(11)$$

De donde solo se obtiene $K_2^{(2)}$ y los restantes parámetros ($K_2^{(1)}$, $K_2^{(1)}$ y μ) no tienen sentido. En esta forma de conducción los mismos no presentan significado alguno, pues no aparecen en la modelación matemática de los circuitos al no existir periodos de conmutación entre ningún par de válvulas.

Considerando todas las condiciones posibles se confeccionó el siguiente algoritmo de solución para facilitar la comprensión de los pasos a ejecutar.

1. Se supone conducción incompleta y se chequea el signo de la corriente $ia^{(2)}$ al final del período de conducción natural ($t = \alpha + \pi/3$).
2. Si la corriente resultante es negativa, se pasa al cálculo del tiempo en el cual la misma se anula (también de forma numérica) y se salta al paso 5.
3. En caso de que su valor sea nulo, la conducción termina en este mismo punto, no se realizan otros cálculos y se salta al paso 5.
4. Si por el contrario, el signo es positivo, entonces la suposición fue errónea y se pasa a solucionar el problema según el sistema de ecuaciones (10) que implica conducción completa.

5. Se calculan las inyecciones en las líneas según las ecuaciones de las series de Fourier.

De esta forma queda determinado el comportamiento del rectificador para una alimentación que puede estar definida por cualquier onda periódica de voltaje y considerando las diferentes condiciones que pueden aparecer en su operación.

Este modelo ha sido programado en Matlab y sus resultados concuerdan con los expuestos en la bibliografía consultada.³

A manera de ejemplo, al convertidor que presenta los datos de la tabla 2 se le realizaron diferentes pruebas con el objetivo de obtener varias gráficas de interés. Todos los parámetros están expresados en por unidad. Las magnitudes X_L y X_F representan respectivamente las reactancias inductivas a primer armónico de los inductores dados por los parámetros L y F del modelo de la figura 1.

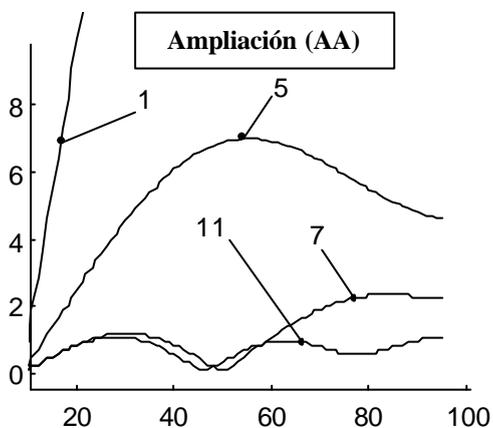
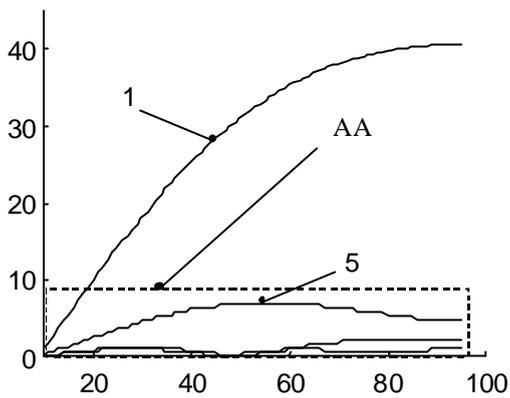
La alimentación de entrada al transformador es puramente sinusoidal conformando un sistema de voltajes simétrico y balanceado en correspondencia con el modelo descrito. La magnitud *rms* de los mismos es de 1 en por unidad para el armónico fundamental en cada fase. El voltaje de la fase a ha sido tomado como referencia.

X_L	X_F	R	E
0,025	0,05	1,5	0,5

En las gráficas de la figura 5 se muestran los valores *rms* de diferentes armónicos de la corriente inyectada en la fase a de las líneas que alimentan el transformador de entrada. Estos valores de corrientes son graficados contra los valores dados al ángulo de disparo de los tiristores correspondiente con el parámetro α del modelo (figura 2).

CONCLUSIONES

El modelo matemático desarrollado permite estudiar en detalle el comportamiento de un rectificador trifásico puente completamente controlado en presencia de un sistema de voltajes balanceados pero posiblemente no sinusoidales.



Valor *rms* de los armónicos de corriente contra el ángulo α .

5

El modelo matemático de cargas de esta naturaleza constituye un objetivo fundamental dentro de la modelación de redes eléctricas para la realización de estudios sobre la generación y propagación de armónicos en sistemas eléctricos.

REFERENCIAS

1. Heydt, G. T. y Xia, Daozhi: "Harmonic Power Flow Studies"(Partes I y II), *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. 101, No. 6 p. 1257, Jun, 1982,
2. Valcárcel, Manuel y Julio G. Mayordomo: "Harmonic Power Flow for Unbalanced Systems", *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 8, No. 4, p. 2052, October, 1993.
3. Valcárcel, Manuel: "Análisis del régimen permanente de los sistemas eléctricos de potencia con elementos no lineales mediante un método de reparto de cargas con armónicos", Tesis de Doctorado, Madrid, 1991.

AUTORES

José Á. González Quintero, Ingeniero Electricista, Máster en Ingeniería Eléctrica, Instructor, Centro de Estudios Electroenergéticos (CEE), Facultad de Ingeniería Eléctrica, Universidad Central de Las Villas (UCLV), Villa Clara
e-mail: pepe@uclv.etecsa.cu

Ignacio Pérez Abril, Ingeniero Electricista, Doctor en Ciencias Técnicas, Profesor Titular, CEE, UCLV, Villa Clara, Cuba
e-mail: iperez@vclv.etecsa.cu

**CENTRO DE OPERACIONES
LUIS FELIPE ALMEIDA OBE
CIUDAD DE LA HABANA**



Nuestro Centro Territorial de Producción, siempre dispuesto a satisfacer las necesidades del cliente, le oferta un grupo de producciones y servicios, para lo que cuenta con una reconocida experiencia.

Contáctenos:

Empresa Eléctrica Ciudad de La Habana
Ave. Independencia km 6 ½, Boyeros
Ciudad de La Habana, Cuba
Teléfono: 45 1357
Fax: 45 1679
email: colfa@abech.cu